

进行深度挖掘,从而达到触类旁通、一题多解的效果.不同的切入点有不同的解法,多点思维,多向开花.

【解析】解法 1: (官方标准答案)

(1) 当 l 与 x 轴垂直时, l 的方程为 $x=2$, 可得 M 的坐标为 $(2, 2)$ 或 $(2, -2)$,

所以直线 BM 的方程为 $y=\frac{1}{2}x+1$ 或 $y=-\frac{1}{2}x-1$;

(2) 当 l 与 x 轴垂直时, AB 为 MN 的垂直平分线, 所以 $\angle ABM=\angle ABN$;

当 l 与 x 轴不垂直时, 设 l 的方程为 $y=k(x-2)$ ($k \neq 0$), $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, 则 $x_1>0, x_2>0$,

由 $\begin{cases} y=k(x-2), \\ y^2=2x, \end{cases}$ 得 $ky^2-2y-4k=0$, 可知 $y_1+y_2=\frac{2}{k}$, $y_1y_2=-4$,

直线 BM, BN 的斜率之和为:

$$k_{BM}+k_{BN}=\frac{y_1}{x_1+2}+\frac{y_2}{x_2+2}=\frac{x_2y_1+x_1y_2+2(y_1+y_2)}{(x_1+2)(x_2+2)} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

将 $x_1=\frac{y_1}{k}+2, x_2=\frac{y_2}{k}+2$ 及 y_1+y_2, y_1y_2 的表达式代入①式分子, 可得:

$$x_2y_1+x_1y_2+2(y_1+y_2)=\frac{2y_1y_2+4k(y_1+y_2)}{k}=\frac{-8+8}{k}=0,$$

所以 $k_{BM}+k_{BN}=0$, 可知 BM, BN 的倾斜角互补, 所以 $\angle ABM=\angle ABN$.

综上, $\angle ABM=\angle ABN$.

解法 2: (官方标准答案的改进) 通过改进, 巧设直线 l 的方程为: $x=my+2$ ($m \in \mathbb{R}$), 省去对直线 l 的斜率是否存在的分类讨论, 从而结合 $k_{BM}+k_{BN}=0$ 的证明来确定直线 BM, BN 的倾斜角互补, 得以证明 $\angle ABM=\angle ABN$.

(1) 同方法 1;

(2) 由于直线 l 的斜率可能不存在但不会为 0, 则可设直线 $l: x=my+2$ ($m \in \mathbb{R}$), $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 则 $x_1>0, x_2>0$,

由 $\begin{cases} x=my+2, \\ y^2=2x, \end{cases}$ 得 $y^2-2my-4=0$, 可知 $y_1+y_2=2m, y_1y_2=-4$.

直线 BM, BN 的斜率之和为:

$$k_{BM}+k_{BN}=\frac{y_1}{x_1+2}+\frac{y_2}{x_2+2}=\frac{x_2y_1+x_1y_2+2(y_1+y_2)}{(x_1+2)(x_2+2)} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

将 $x_1=my_1+2, x_2=my_2+2$ 及 y_1+y_2, y_1y_2 的表达式代入①式分子, 可得:

$$x_2y_1+x_1y_2+2(y_1+y_2)=2my_1y_2+4(y_1+y_2)=-8m+8m=0,$$

所以 $k_{BM}+k_{BN}=0$, 可知 BM, BN 的倾斜角互补, 所以 $\angle ABM=\angle ABN$.

解法 3: (角平分线性性质法 1) 通过改进, 巧设直线 l 的方程为: $x=my+2$ ($m \in \mathbb{R}$), 通过分析, 结合角平分线的性质知若有 $\angle ABM=\angle ABN$, 则有 $\frac{|BM|}{|BN|}=\frac{|AM|}{|AN|}$ 成立, 利用两点间的距离公式的转化以及比值的应用得到关系式成立, 得以证明 $\angle ABM=\angle ABN$.

(1) 同方法 1;

(2) 由于直线 l 的斜率可能不存在但不会为 0, 则可设直线 $l: x=my+2$ ($m \in \mathbb{R}$), $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 则 $x_1>0, x_2>0$,

由 $\begin{cases} x=my+2, \\ y^2=2x, \end{cases}$ 得 $y^2-2my-4=0$, 可知 $y_1+y_2=2m, y_1y_2=-4$,

直线 BM 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$, 即 $y_1x-(x_1+2)y+2y_1=0$, 则

$$A(2, 0) \text{ 到直线 } BM \text{ 的距离 } d_1=\frac{|4y_1|}{\sqrt{y_1^2+(x_1+2)^2}}=\frac{4}{\sqrt{1+(\frac{x_1+2}{y_1})^2}}.$$

直线 BN 的方程为 $y=\frac{y_2}{x_2+2}(x+2)$, 即 $y_2x-(x_2+2)y+2y_2=0$, 则

$$A(2, 0) \text{ 到直线 } BN \text{ 的距离 } d_2=\frac{|4y_2|}{\sqrt{y_2^2+(x_2+2)^2}}=\frac{4}{\sqrt{1+(\frac{x_2+2}{y_2})^2}}.$$

由于 $\frac{x_1+2}{y_1}=\frac{my_1+4}{y_1}=m+\frac{4}{y_1}$, 同理 $\frac{x_2+2}{y_2}=m+\frac{4}{y_2}$,

所以 $\frac{x_1+2}{y_1}+\frac{x_2+2}{y_2}=2m+\frac{4}{y_1}+\frac{4}{y_2}=2m+\frac{4(y_1+y_2)}{y_1y_2}=0$, 则有

$$(\frac{x_1+2}{y_1})^2=(\frac{x_2+2}{y_2})^2, \text{ 即 } d_1=d_2.$$

所以 x 轴为 $\angle MBN$ 的平分线, 故 $\angle ABM=\angle ABN$.

解法 4: (角平分线性性质法 2) 通过改进, 巧设直线 l 的方程为: $x=my+2$ ($m \in \mathbb{R}$), 通过分析, 结合角平分线的性质知若有 $\angle ABM=\angle ABN$, 则有 $\frac{|BM|}{|BN|}=\frac{|AM|}{|AN|}$ 成立, 利用两点间的距离公式的转化以及比值的应用得到关系式成立, 得以证明 $\angle ABM=\angle ABN$.

(1) 同方法 1;

(2) 由于直线 l 的斜率可能不存在但不会为 0, 则可设直线 $l: x=my+2$ ($m \in \mathbb{R}$), $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 则 $x_1>0, x_2>0$.

由 $\begin{cases} x=my+2, \\ y^2=2x, \end{cases}$ 得 $y^2-2my-4=0$, 可知 $y_1+y_2=2m, y_1y_2=-4$.

而 $A(2, 0), B(-2, 0)$,

可得 $|MA|^2=m^2y_1^2+y_1^2, |NA|^2=m^2y_2^2+y_2^2, |MB|^2=(my_1+4)^2+y_1^2, |NB|^2=(my_2+4)^2+y_2^2$.

若有 $\angle ABM=\angle ABN$, 则有 $\frac{|BM|}{|BN|}=\frac{|AM|}{|AN|}$ 成立, 即 $\frac{(my_1+4)^2+y_1^2}{(my_2+4)^2+y_2^2}=\frac{m^2y_1^2+y_1^2}{m^2y_2^2+y_2^2}$ 成立, 亦即 $(1+m^2)[(my_1+4)^2y_2^2-(my_2+4)^2y_1^2]=0$ 成立.

$$\text{而 } (my_1+4)^2y_2^2-(my_2+4)^2y_1^2=[2my_1y_2+4(y_1+y_2)] \cdot 4(y_2-y_1)=(-8m+8m) \cdot 4(y_2-y_1)=0,$$

所以 $\angle ABM=\angle ABN$.

解法 5: (几何法) 通过改进, 巧设直线 l 的方程为: $x=my+2$ ($m \in \mathbb{R}$), 通过分析, 利用平面几何方法, 根据 $\angle ABM=\angle ABN$ 的等价条件 $\text{Rt}\triangle BFN \sim \text{Rt}\triangle BEM$ 的转化, 结合平面几何中对应直角三角形相应边的比值的关系式的建立与转化来分析, 得以证明 $\angle ABM=\angle ABN$.

(1) 同方法 1;

(2) 由于直线 l 的斜率可能不存在但不会为 0, 则可设直线 $l: x=my+2$ ($m \in \mathbb{R}$), $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 结合图象可知 $y_1>$